Тригонометрия.

Простейшие тригонометрические уравнения.

1. $\sin x = a \;\Rightarrow\; x = \left[\begin{array}{ll} \arcsin a + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$
2. $\cos x = a \;\Rightarrow\; x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
3. $\operatorname{tg} x = a \;\Rightarrow\; x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
4. $\operatorname{ctg} x = a \;\Rightarrow\; x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Соотношения между функциями одного угла.

5. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$
6. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
7. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$
8. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$
9. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$
10. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Формулы для суммы и разности аргументов.

11. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$
12. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$
13. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$
14. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$
15. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$
16. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$

Формулы половинного аргумента.

17. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$
18. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$
19. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$
20. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

Примечание: в формулах 19-20 знаки перед корнями следует брать в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.

Формулы двойных и тройных углов.

21. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$
22. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$
23. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$
24. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$
25. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$
26. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$
27. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$
28. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$

Преобразование сумм в произведение.

29. Последовательность действий по преобразованию $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ в произведение числа на синус (косинус) некоторого угла.

а) Вынести множитель $\sqrt{a^2+b^2}$ за скобки:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

б) Или подобрать такой угол φ, что одновременно выполнены два равенства

$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi).$$

Или подобрать такой угол ψ, что что одновременно выполнены два равенства

$\sin\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\alpha-\varphi).$$

30. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$
31. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$
32. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$
33. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$
34. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$
35. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$
36. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}.$
37. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}.$

Преобразование произведений в сумму.

38. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$
39. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$
40. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$

Универсальная тригонометрическая подстановка.

41. $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$
42. $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$
43. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Формулы приведения.

44. Любая тригонометрическая функция угла $\alpha + \frac{\pi}{2}\cdot n$ по абсолютной величине равна той же функции угла α, если n — четное, и кофункции этого же угла, если n — нечетное. При этом, если функция угла $\alpha + \frac{\pi}{2}\cdot n$ положительна, когда α — острый положительный угол, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то различны.